Оқушылардың республикалық математикалық олимпиадасының III кезеңі
2019-2020 оқу жылы
10-сынып, I күн

Жұмыс уақыты: 3 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.
Электрондық құралдарды пайдалануға тыйым салынады.

№ 1. Тікбұрышты ABC үшбұрышында M нүктесі – BC гипотенузасының ортасы. AC және AB кесінділерінде $AE \cdot BE = AD \cdot CD$ болатындай сәйкесінше D және E нүктелері табылған. $ME = MD$ теңдігін дәлелдеңіз.

№ 2. $q(q^2 - q - 1) = r(2r + 3)$ теңдігін қанағаттандыратын жай сандардың барлық (q, r) жұптарын табыңыз.

№ 3. Нақты $a_1, a_2, \dots, a_{90} \geq -1$ сандары үшін $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{90}^3 = 0$ теңдігі орындалады. $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{90}^2$ өрнегінің ең үлкен мүмкін мәнін табыңыз.

III этап республиканской олимпиады школьников по математике
2019-2020 учебный год
10 класс, I день

Время работы: 3 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Использование электронных устройств запрещено.

№ 1. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC. На отрезках AC и AB нашлись соответственно точки D и E такие, что $AE \cdot BE = AD \cdot CD$. Докажите, что $ME = MD$.

№ 2. Найдите все пары простых чисел (q, r), для которых выполнено равенство $q(q^2 - q - 1) = r(2r + 3)$.

№ 3. Действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{90} \geq -1$ такие, что $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{90}^3 = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{90}^2$.