

Оқушылардың республикалық математикалық олимпиадасының III кезеңі

2019-2020 оқу жылы

11-сынып, I күн

*Жұмыс уақыты: 3 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.
Электрондық құралдарды пайдалануға тыйым салынады.*

№ 1. Тікбұрышты ABC үшбұрышында M нүктесі – BC гипотенузасының ортасы. AC және AB кесінділерінде $AE \cdot BE = AD \cdot CD$ болатындай сәйкесінше D және E нүктелері табылған. $ME = MD$ теңдігін дәлелдеңіз.

№ 2. Колледжде 300 студент оқиды. Әрбір екі студент өзара таныс, немесе бірін-бірі білмейді. Және бір-бірімен таныс үш студент жоқ. Әрбір студенттің n -нан көп танысы жоқ екені және кез келген m ($1 \leq m \leq n$) үшін дәл m танысы бар студент табылатыны белгілі. Олай болса, n -нің ең үлкен мүмкін мәнін табыңыз.

№ 3. Коэффициенттері бүтін, дәрежесі 10-нан аспайтын $P(x)$ көпмүшесі берілген. Әрбір $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ үшін $P(m) = k$ болатындай бүтін m саны табылатыны белгілі. Егер $|P(10) - P(0)| < 10000$ болса, әрбір $k \in \{1, 2, \dots, 10000\}$ үшін $P(m) = k$ болатындай бүтін m саны табылатынын дәлелдеңіз.

III этап республиканской олимпиады школьников по математике

2019-2020 учебный год

11 класс, I день

*Время работы: 3 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Использование электронных устройств запрещено.*

№ 1. В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC . На отрезках AC и AB нашлись соответственно точки D и E такие, что $AE \cdot BE = AD \cdot CD$. Докажите, что $ME = MD$.

№ 2. В колледже учатся 300 студентов. Любые два студента либо знают друг друга, либо не знают друг друга, и нет трех студентов, знающих друг друга. Известно, что каждый студент знает не более n других студентов и для каждого m ($1 \leq m \leq n$) существует студент, знающий ровно m других студентов. Найдите наибольшее возможное значение n .

№ 3. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n \leq 10$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ существует целое число m , что $P(m) = k$. Докажите, что если $|P(10) - P(0)| < 10000$, то для любого $k \in \{1, 2, \dots, 10000\}$ существует целое число m такое, что $P(m) = k$.