Математика пәні бойынша 2019-2020 оқу жылының Республикалық оқушылар олимпиадасының III кезеңі
9 сынып. 2 тур

Жұмыс уақыты – 3 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Электронды құралдармен қолдануға тыйым салынады

№4. ABC үшбұрышында AH биіктігі жүргізілген. A_1, B_1, C_1 нүктелері сәйкесінше BC, AC, AB қабырғаларының орталары. K нүктесі B_1 нүктесіне BC түзуіне қатысты симметриялы нүкте. C_1K түзуінің HA_1 кесіндісін қақ бөлетінін дәлелдеңіз.

№5. Әрқайсысының кемінде 11 бөлгіші бар a және b натурал сандары болсын. a және b сандарының бөлгіштерін өсу ретімен жазып, сәйкесінше $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ және $1 = b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ (шекті) тізбектері алынды. Егер $a_{10} + b_{10} = a$ және $a_{11} + b_{11} = b$ екені белгілі болса, a және b сандарын табыңыз.

№6. Салмақтары m_1, m_2, $\ldots$, m_n, болатын n ($n \geqslant 2$) гір тастары берілген, мұндағы әрбір $k = 1, 2, \ldots, n$ үшін m_k — бүтін сан және $1 \leqslant m_k \leqslant k$. Егер $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ салмақтардың қосындысы жұп сан болса, осы гір тастарын салмақтарының қосындысы тең болатындай екі топқа бөлуге болатынын дәлелдеңіз.

III этап Республиканской олимпиады школьников по математике. 2019-2020 учебный год
9 класс. 2 тур

Время работы – 3 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Запрещается пользоваться электронными устройствами

№4. В треугольнике ABC проведена высота AH, а точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно. Пусть K — точка, симметричная точке B_1 относительно прямой BC. Докажите, что прямая C_1K делит отрезок HA_1 пополам.

№5. Пусть каждое из натуральных чисел a и b имеют не менее 11 делителей. Выписав делителей a и b в порядке возрастания, соответственно получили (конечные) последовательности $1 = a_1 < a_2 < < a_3 < \ldots$ и $1 = b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$. Найдите числа a и b, если известно, что $a_{10} + b_{10} = a$ и $a_{11} + b_{11} = b$.

№6. Даны n ($n \geqslant 2$) гирь с массами m_1, m_2, $\ldots$, m_n, где m_k — целое число такое, что $1 \leqslant m_k \leqslant k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что если сумма $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ четна, то данные гири можно разбить на две группы с одинаковой суммарной массой.

Математика пәні бойынша 2019-2020 оқу жылының Республикалық оқушылар олимпиадасының III кезеңі 10 сынып. 2 тур

Жұмыс уақыты – 3 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Электронды құралдармен қолдануға тыйым салынады

№4. Тұрақты натурал m және n сандары берілген. Төбелерінің саны $m+n$ болатын, m төбесін қызыл түске, ал қалған n төбесін көк түске боялған көпбұрышты қарастырайық. Көпбұрыштың қабырғаларының екі ұшы да қызыл болса, осы қабырғаға 2 санын жазамыз, ал егер оның екі ұшы да көк болса, оған $1/2$ санын жазамыз. Қалған қабырғаларға 1 санын жазамыз. Жазылған сандардың көбейтіндісін P деп белгілейік. P-ның мүмкін мәндерін табыңыз.

№5. $\{a_i\}$ сандар тізбегі былайша анықталады: $a_1 = 2020$ және әрбір $n \geqslant 1$ үшін $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$. Бұл тізбекте рационал санның квадраты кездеспейтінін дәлелдеңіз.

№6. ω шеңбері ABC үшбұрышының A және B төбелері арқылы өтіп, оның BC және AC кесінділерін сәйкесінше D және E нүктелерінде қияды. BAD бұрышының биссектрисасы ω-ны екінші рет M нүктесінде қиып өтеді. BD және ME түзулері K нүктесінде қиылысады. K нүктесінен AM түзуіне түсірілген перпендикуляр AC түзуін N нүктесінде қисын. Онда $\angle BNK = \angle DNK$ болатынын дәлелдеңіз.

III этап Республиканской олимпиады школьников по математике. 2019-2020 учебный год 10 класс. 2 тур

Время работы – 3 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Запрещается пользоваться электронными устройствами

№4. Даны фиксированные натуральные числа m и n. Рассмотрим многоугольник с $m+n$ вершинами. Покрасим m вершин многоугольника в красный цвет, а остальные n вершин — в синий цвет. Запишем на стороне многоугольника число 2, если оба конца этой стороны покрашены в красный цвет, число $1/2$ — если оба конца отрезка покрашены в синий цвет, и число 1 — в остальных случаях. Пусть P — произведение всех записанных чисел. Найдите возможные значения P.

№5. Последовательность $\{a_i\}$ определяется следующим образом: $a_1 = 2020$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$ для всех $n \geqslant 1$. Докажите, что эта последовательность не содержит квадрат рационального числа.

№6. В треугольнике ABC окружность ω проходит через точки A и B и пересекает отрезки BC и AC соответственно в точках D и E. Биссектриса угла BAD во второй раз пересекает ω в точке M, а прямые BD и ME пересекаются в точке K. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AM, пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $\angle BNK = \angle DNK$.

Математика пәні бойынша 2019-2020 оқу жылының Республикалық оқушылар олимпиадасының III кезеңі 11 сынып. 2 тур

Жұмыс уақыты – 3 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады
Электронды құралдармен қолдануға тыйым салынады

№4. Әрқайсысының кемінде 11 бөлгіші бар a және b натурал сандары болсын. a және b сандарының бөлгіштерін өсу ретімен жазып, сәйкесінше $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ және $1 = b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ (шекті) тізбектері алынды. Егер $a_{10} + b_{10} = a$ және $a_{11} + b_{11} = b$ екені белгілі болса, a және b сандарын табыңыз.

№5. Кез келген оң нақты x және y сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіз: $\dfrac{1}{x+y+1} - \dfrac{1}{(x+1)(y+1)} < \dfrac{1}{11}$.

№6. ω шеңбері ABC үшбұрышының A және B төбелері арқылы өтіп, оның BC және AC кесінділерін сәйкесінше D және E нүктелерінде қияды. BAD бұрышының биссектрисасы ω-ны екінші рет M нүктесінде қиып өтеді. BD және ME түзулері K нүктесінде қиылысады. K нүктесінен AM түзуіне түсірілген перпендикуляр AC түзуін N нүктесінде қисын. Онда $\angle BNK = \angle DNK$ болатынын дәлелдеңіз.

III этап Республиканской олимпиады школьников по математике. 2019-2020 учебный год 11 класс. 2 тур

Время работы – 3 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов
Запрещается пользоваться электронными устройствами

№4. Пусть каждое из натуральных чисел a и b имеют не менее 11 делителей. Выписав делителей a и b в порядке возрастания, соответственно получили (конечные) последовательности $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ и $1 = b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$. Найдите числа a и b, если известно, что $a_{10} + b_{10} = a$ и $a_{11} + b_{11} = b$.

№5. Для любых положительных вещественных чисел x и y докажите неравенство: $\dfrac{1}{x+y+1} - \dfrac{1}{(x+1)(y+1)} < \dfrac{1}{11}$.

№6. В треугольнике ABC окружность ω проходит через точки A и B и пересекает отрезки BC и AC соответственно в точках D и E. Биссектриса угла BAD во второй раз пересекает ω в точке M, а прямые BD и ME пересекаются в точке K. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AM, пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $\angle BNK = \angle DNK$.